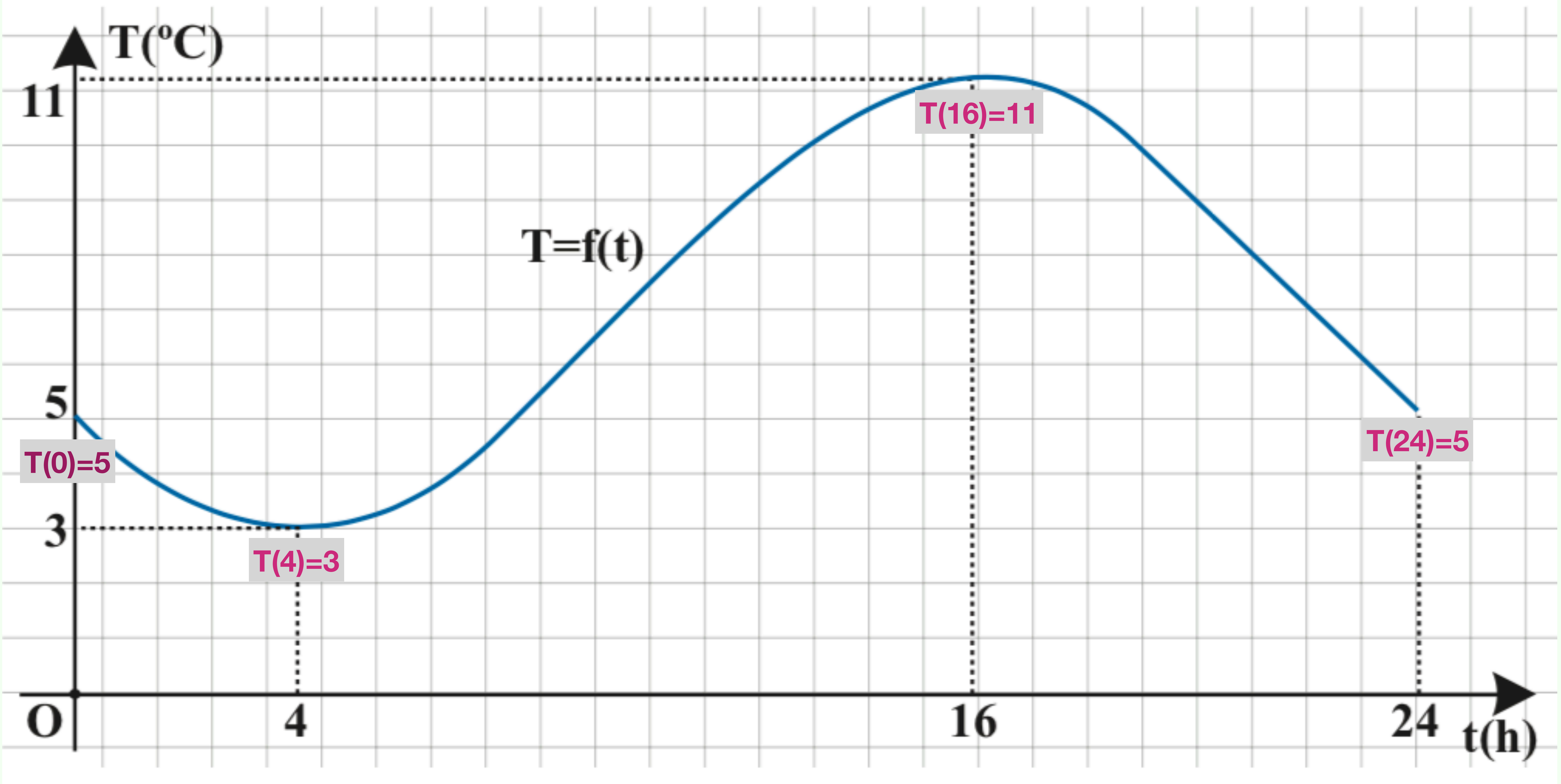
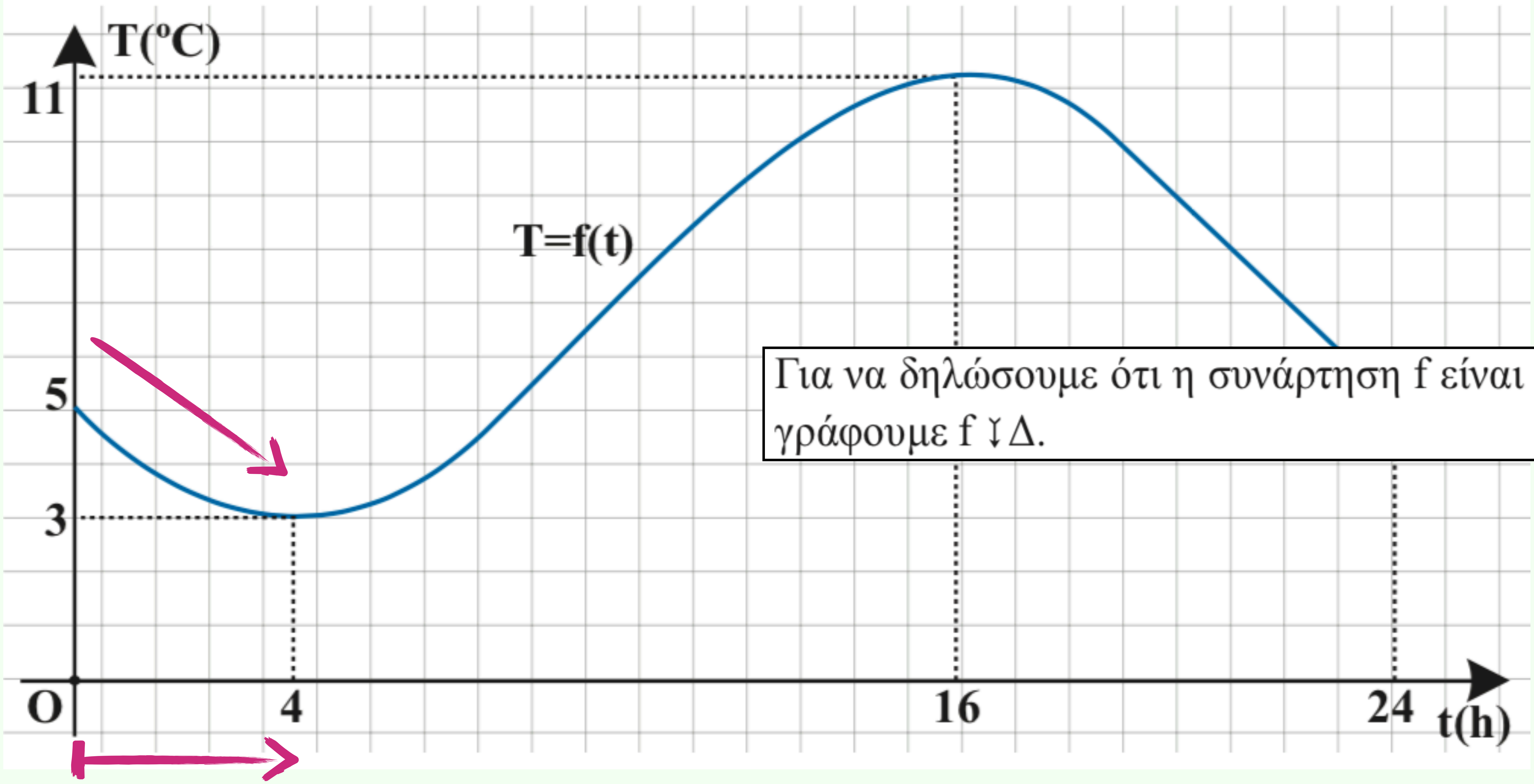
Μάθημα (1) - Μονοτονία συνάρτησης

Διάγραμμα Θερμοκρασίας σαν συνάρτηση του χρόνου
T=f(t) Temperature=f(time)





Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε f ↧ Δ.

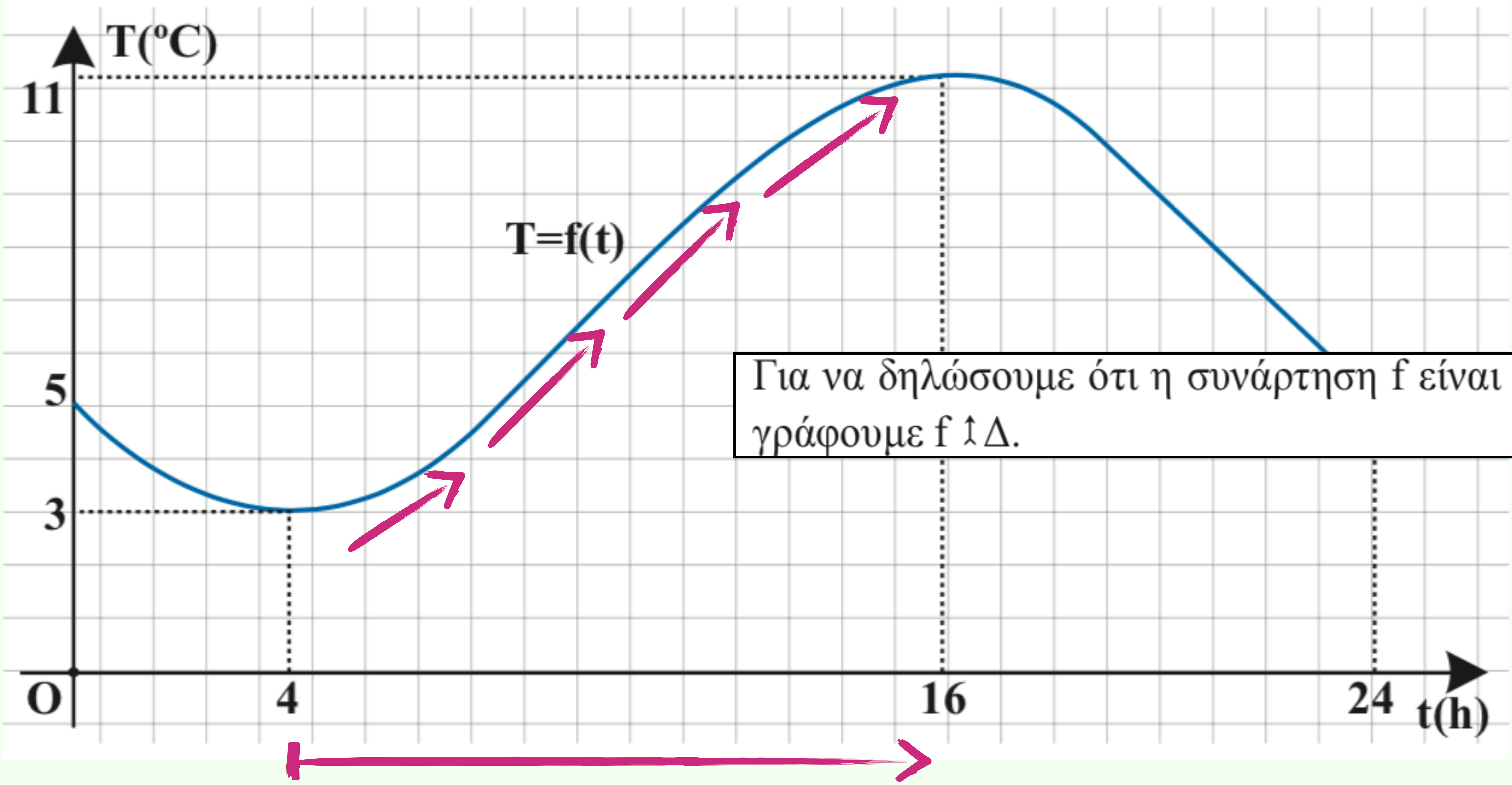
Μονοτονία συνάρτησης

Στο διάστημα [0,4] παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται (δλδ T πέφτει) <u>T Γνησίως φθίνουσα</u>

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Μονοτονία συνάρτησης



Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε f ↑Δ.

Στο διάστημα [4,16] παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται (δλδ T ανεβαίνει) <u>T Γνησίως αύξουσα</u>

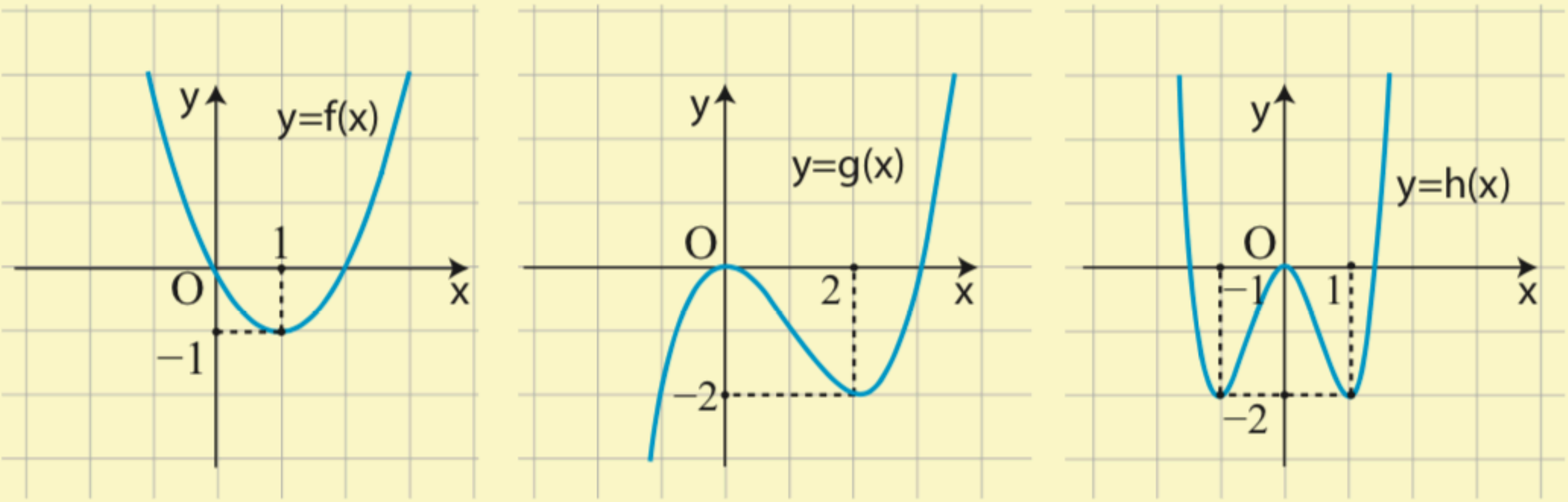
Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Ασκήσεις για το σπίτι (1)

1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

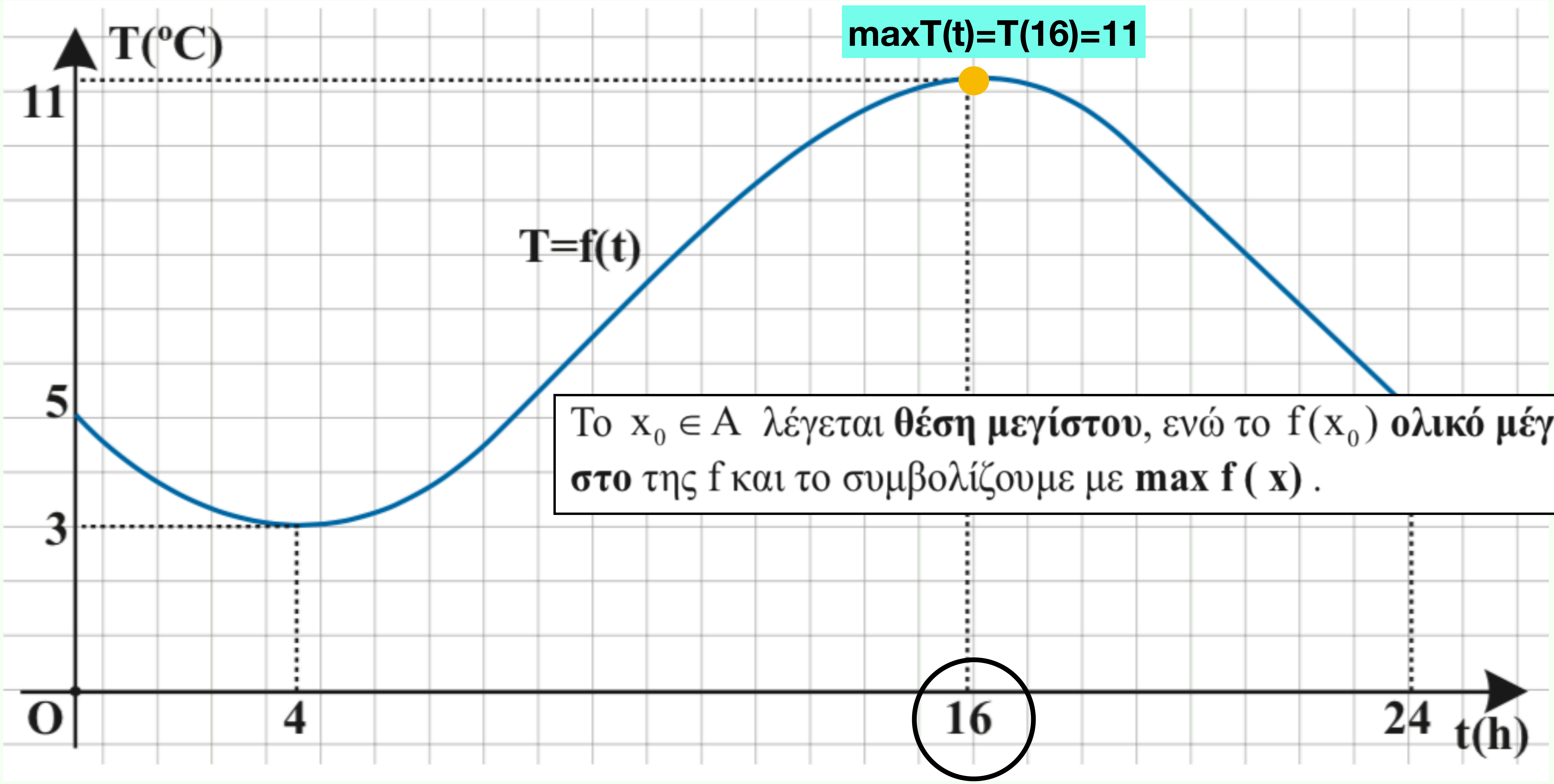
α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα.



Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

Μάθημα (2) - Ακρότατα

Ακρότατα συνάρτησης



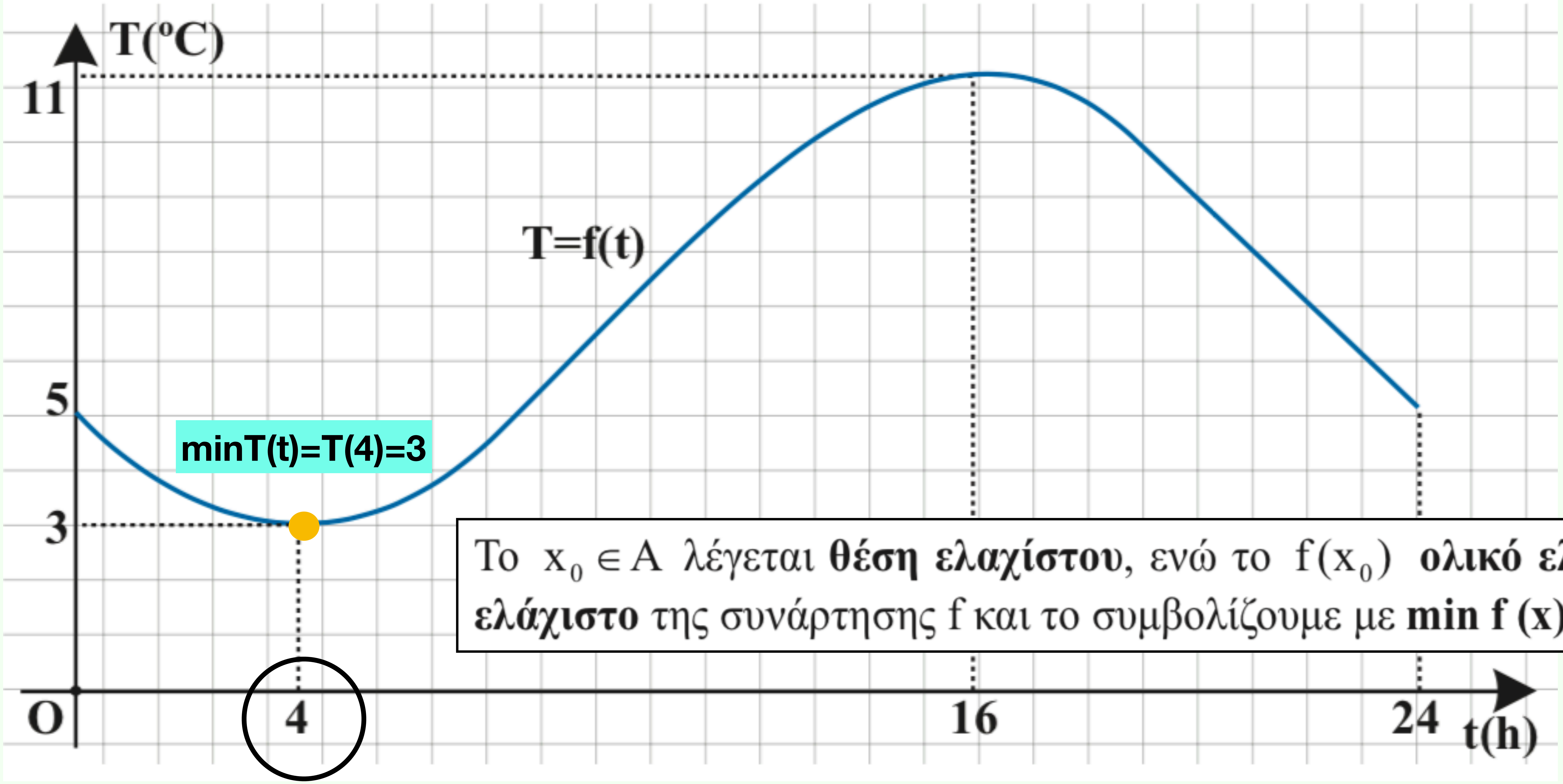
Στο διάστημα [0,24] που λαμβάνει η συνάρτηση T την μέγιστη τιμή της;

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με **max f (x)** .

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν:

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Ακρότατα συνάρτησης



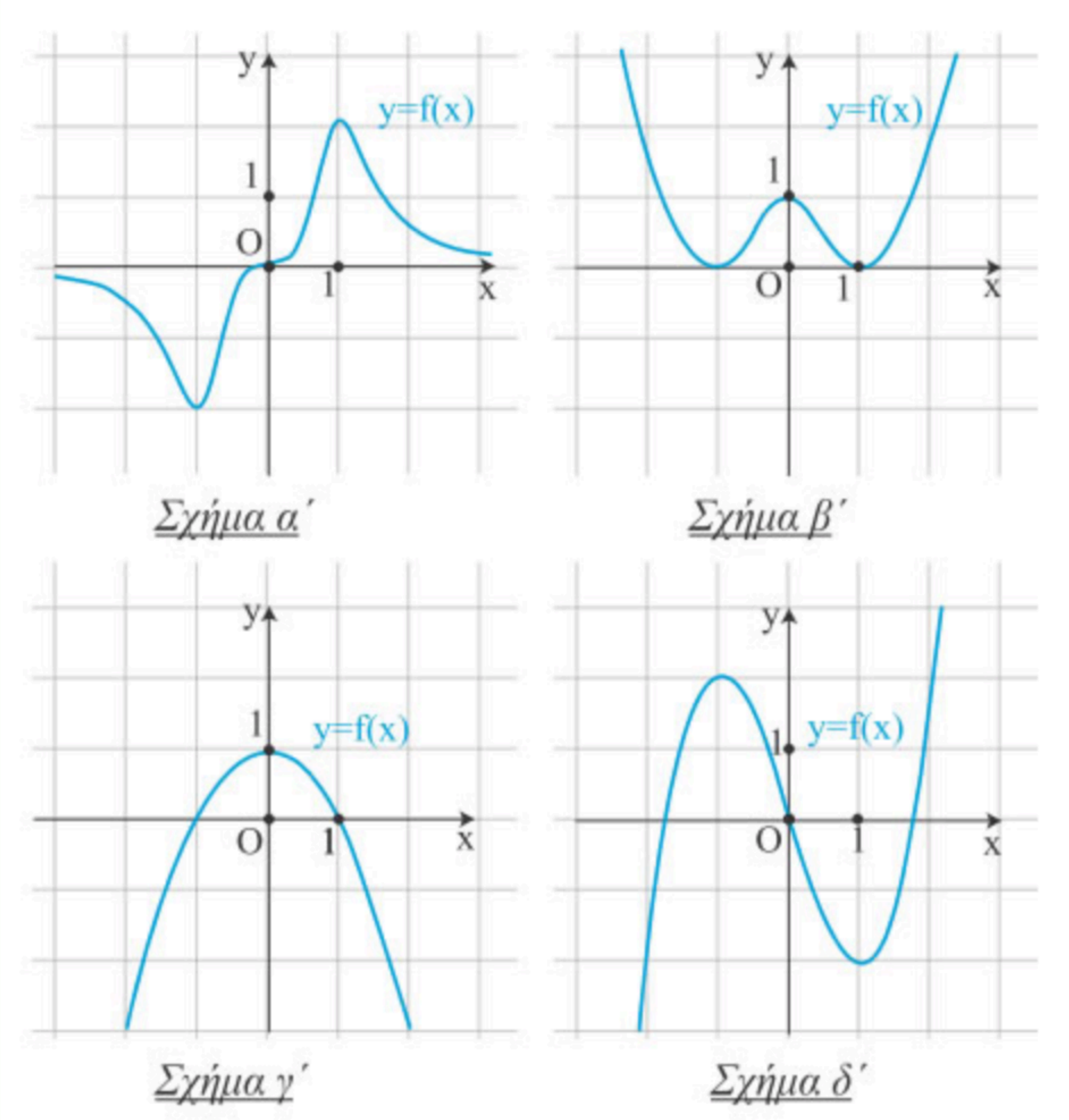
Στο διάστημα [0,24] που λαμβάνει η συνάρτηση T την ελάχιστη τιμή της;

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min f (x)** .

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A$$

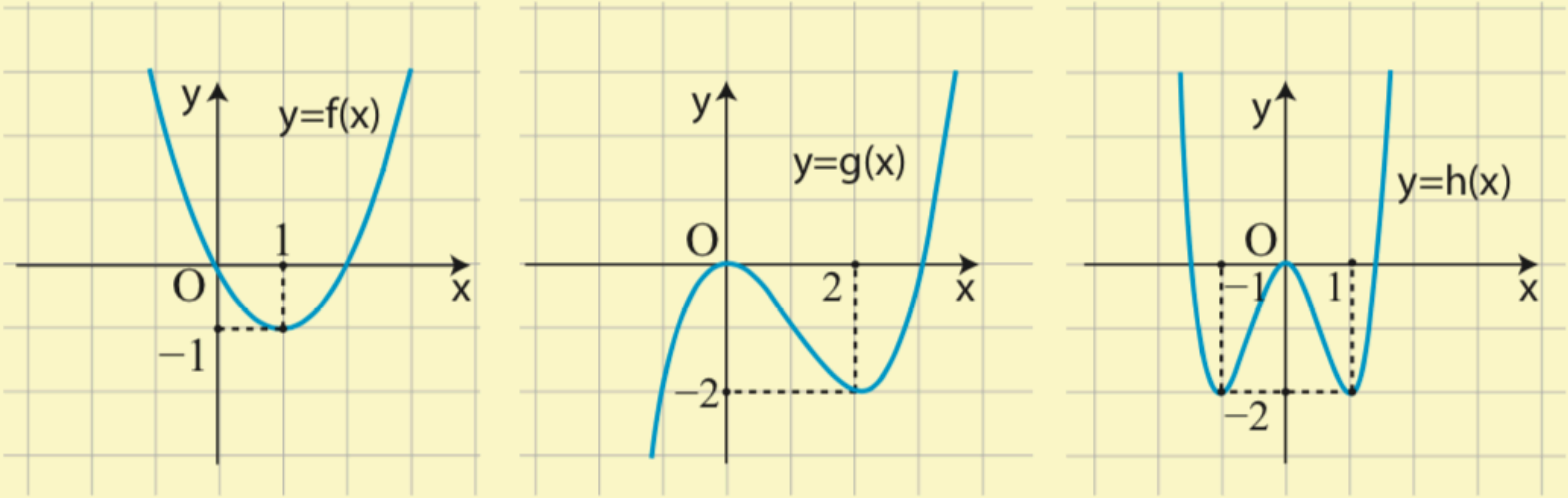
Παράδειγμα (1)



Βρείτε τα ακρότητα κάθε συνάρτησης

Μία συνάρτηση μπορεί να έχει και <u>μέγιστο και ελάχιστο</u>, <u>μόνο ελάχιστο</u>, <u>μόνο μέγιστο</u> ή <u>ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο</u>

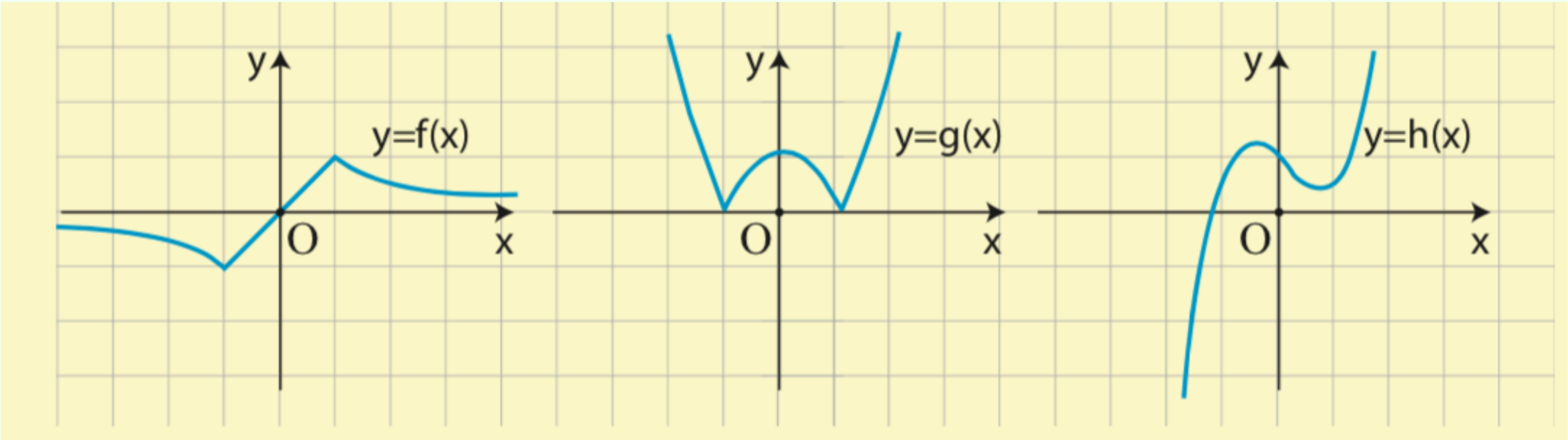
Ασκήσεις για το σπίτι (2)



2) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

Ασκήσεις για το σπίτι (3)



Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 39

Μάθημα (3) - Ασκήσεις στη μονοτονία (με τύπο συνάρτησης)

Παράδειγμα (1)

Πώς αποδεικνύω ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα;

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x-3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = 5x + 2$

Παράδειγμα (2)

Πώς αποδεικνύω ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή φθίνουσα;

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = -8x - \frac{2}{3}$

Μάθημα (4) - Ασκήσεις στα ακρότατα (με τύπο συνάρτησης)

Παράδειγμα (3)

Πώς αποδεικνύω ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα σημείο;

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x=3.

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

Παράδειγμα (3)

Πώς αποδεικνύω ότι μία συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο σε ένα σημείο;

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x=3.

i) Η τιμή της συνάρτησης στη θέση $x=3$, είναι $f(3)=3^2-6\cdot 3+10 \Leftrightarrow f(3)=1$. Αφού θέλουμε να δείξουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=3$ θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $f(x)\geq f(3), \forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$f(x)\geq f(3) \Leftrightarrow x^2-6x+10\geq 1 \Leftrightarrow x^2-6x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής x.

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

Άσκηση για το σπίτι (1)

3) Να δείξετε ότι:

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$.

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

Διόρθωση ασκήσεων (1)

3) Να δείξετε ότι:

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x=1.

ii) Η τιμή της συνάρτησης στη θέση $x=1$, είναι $g(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow g(1)=\frac{2}{2} \Leftrightarrow$ $g(1)=1$. Αφού θέλουμε να δείξουμε ότι η g παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=1$ θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $g(x)\leq g(1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$g(x)\leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής x.

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38

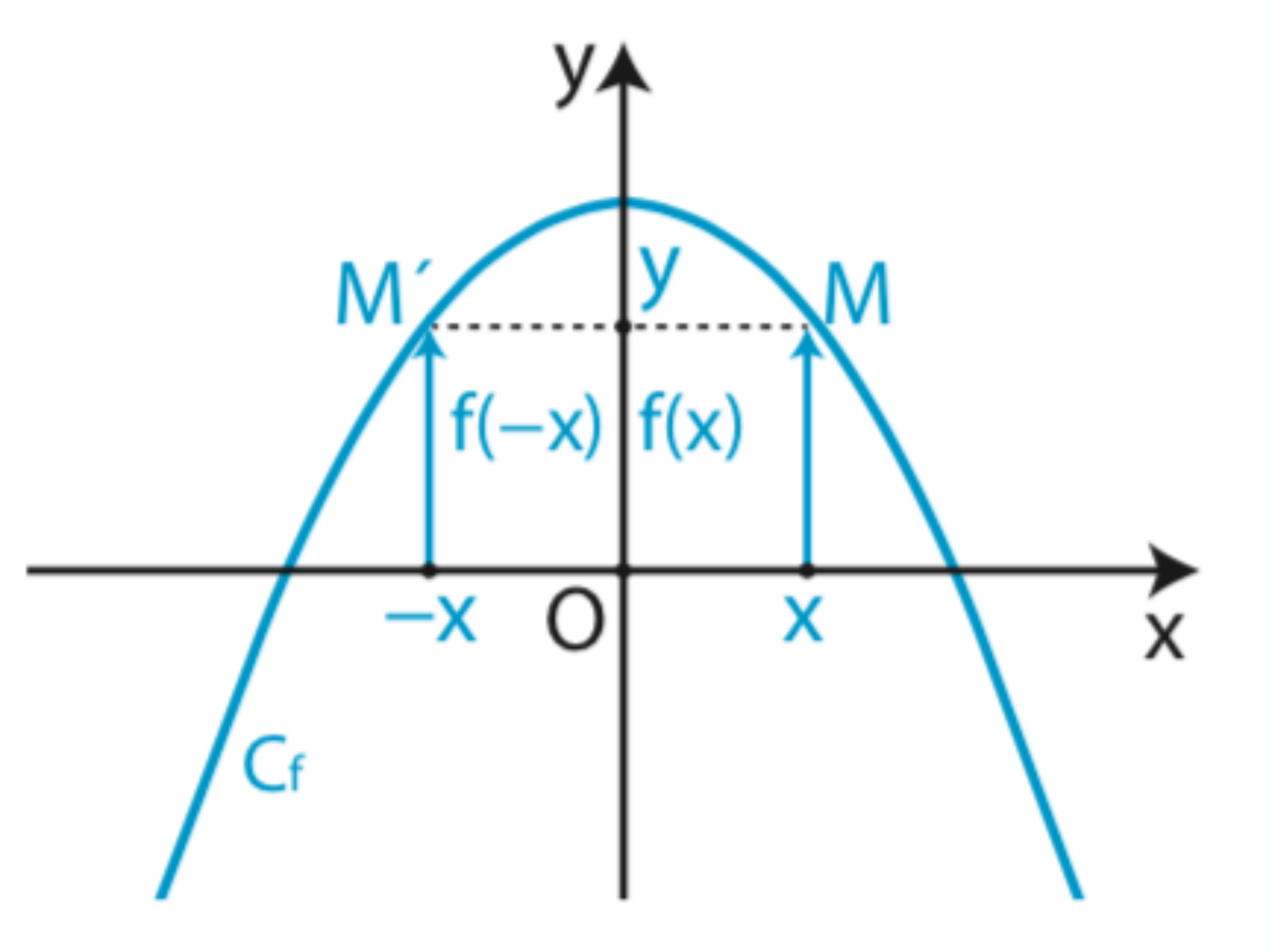
Μάθημα (5) - Συμμετρίες συνάρτησης

Συμμετρίες συνάρτησης

- Άρτια συνάρτηση
- Περιττή συνάρτηση

Συμμετρίες συνάρτησης

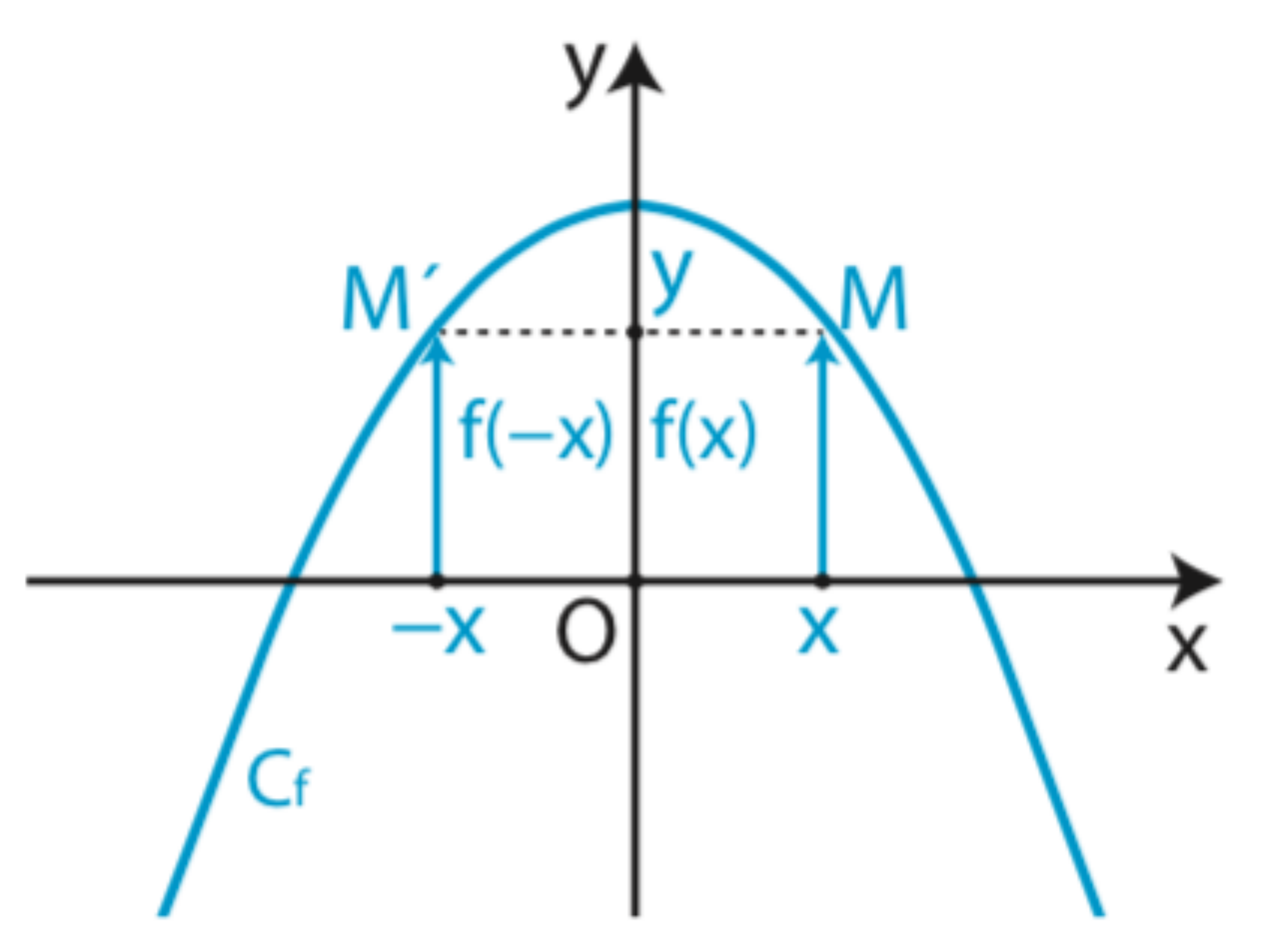
• Άρτια συνάρτηση



Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

Συμμετρίες συνάρτησης

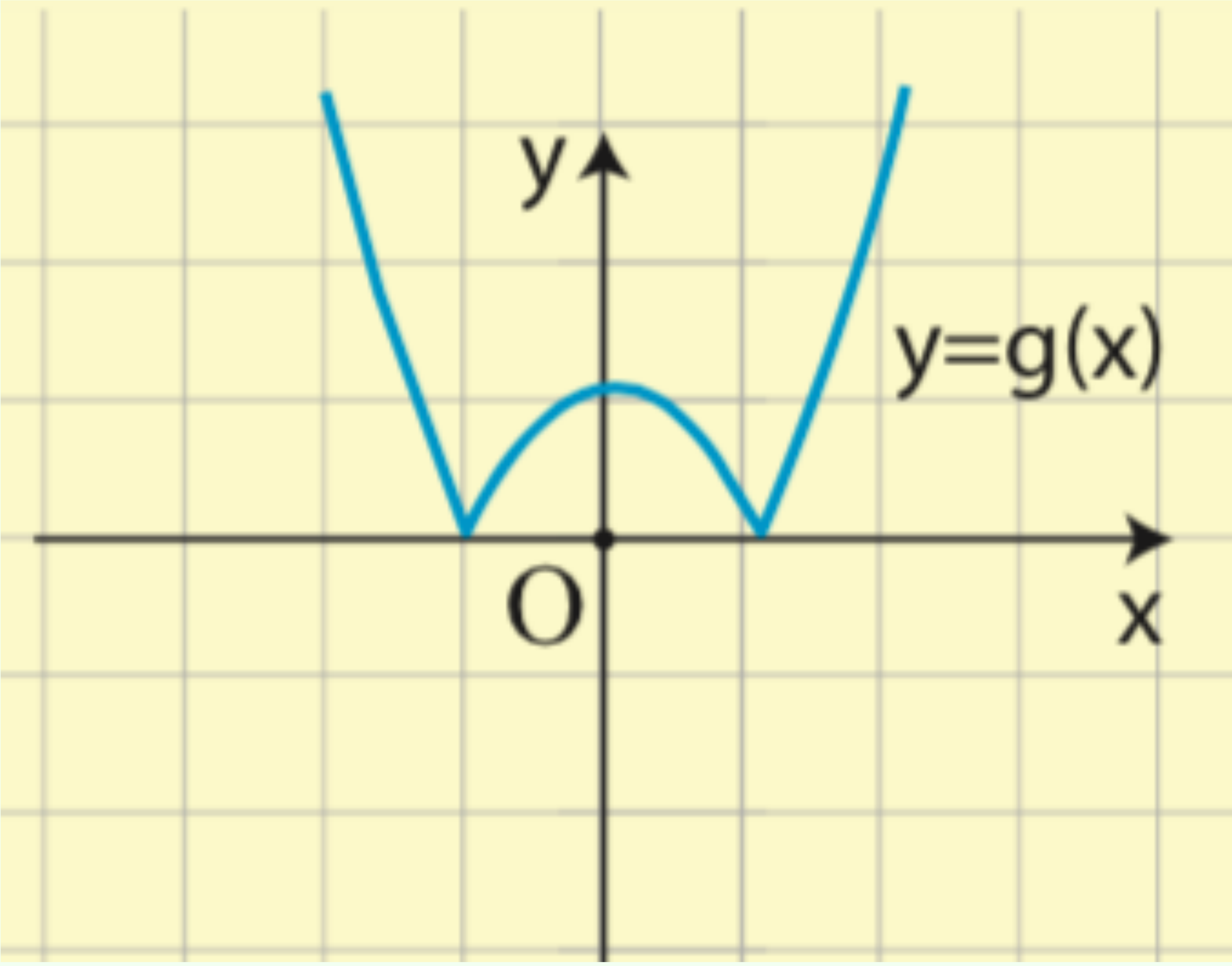
• Άρτια συνάρτηση

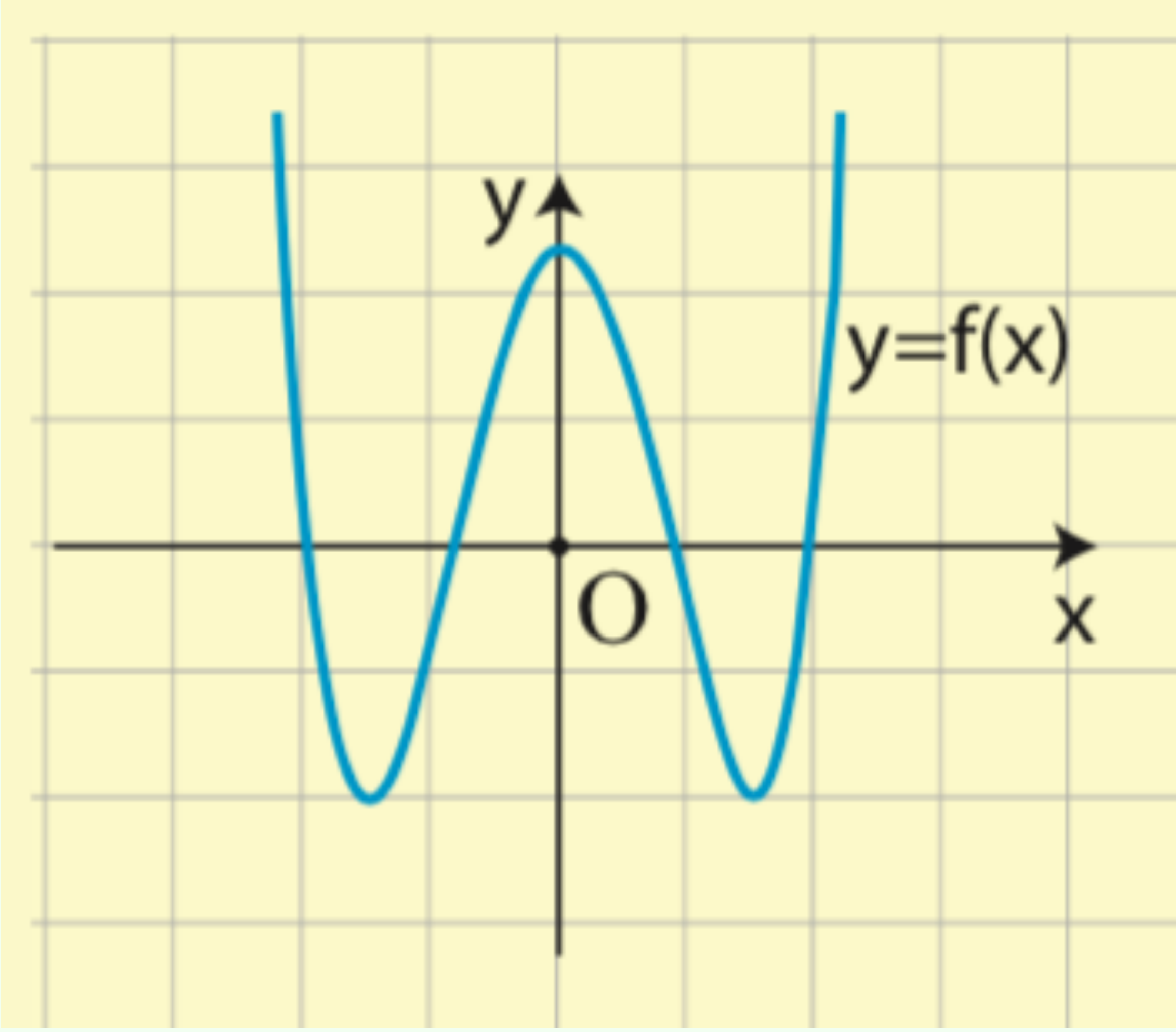


Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

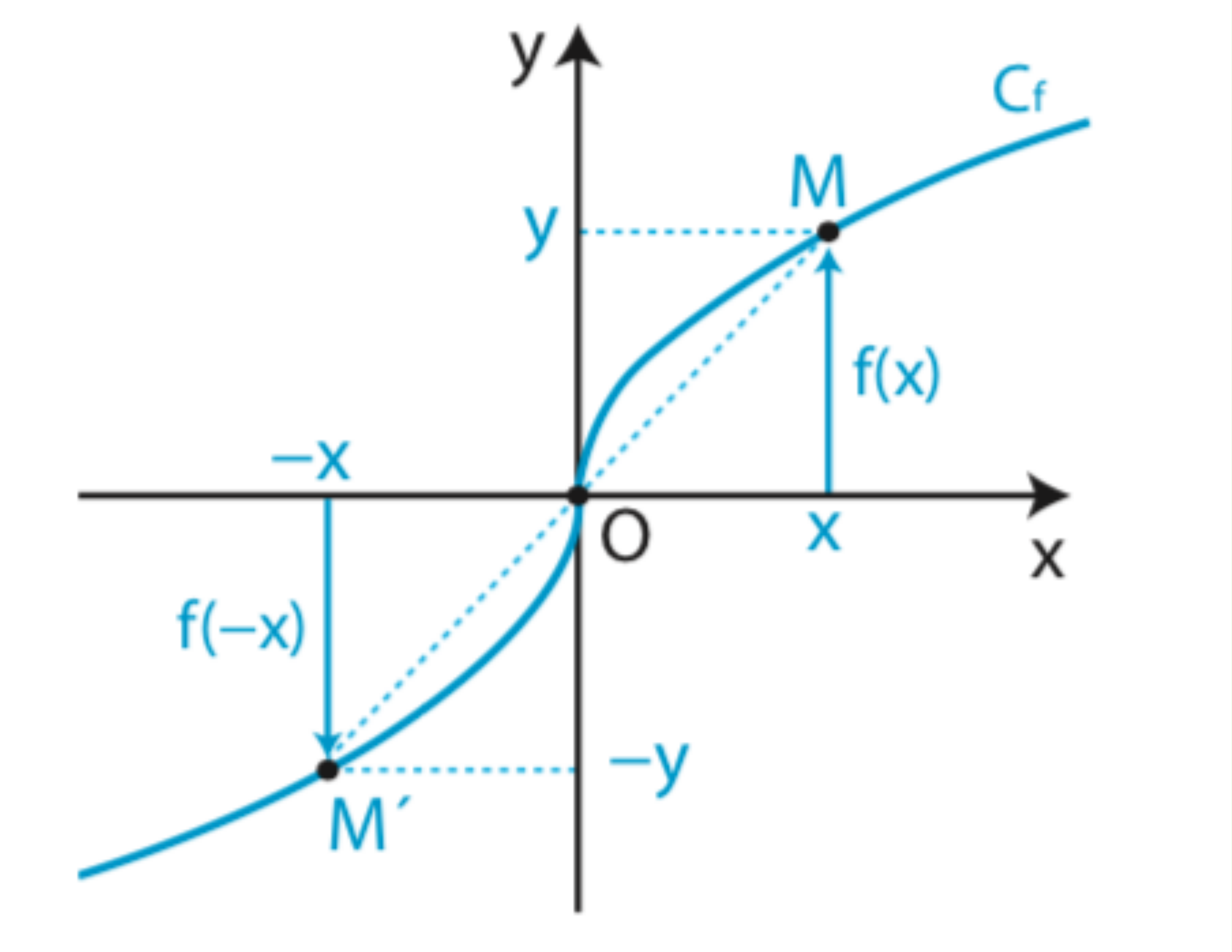
Παραδείγματα άρτιων συναρτήσεων





Συμμετρίες συνάρτησης

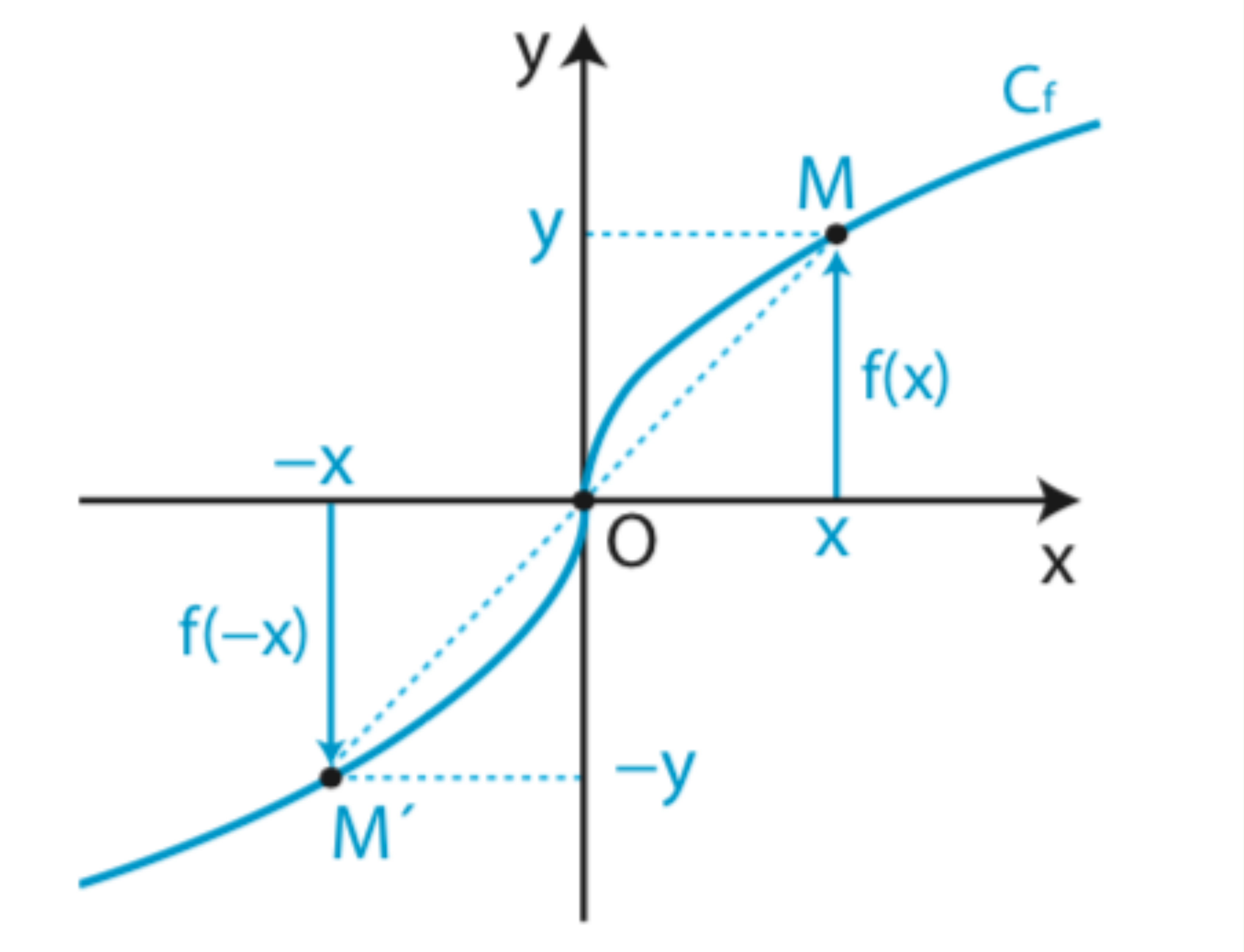
• Περιττή συνάρτηση



Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

Συμμετρίες συνάρτησης

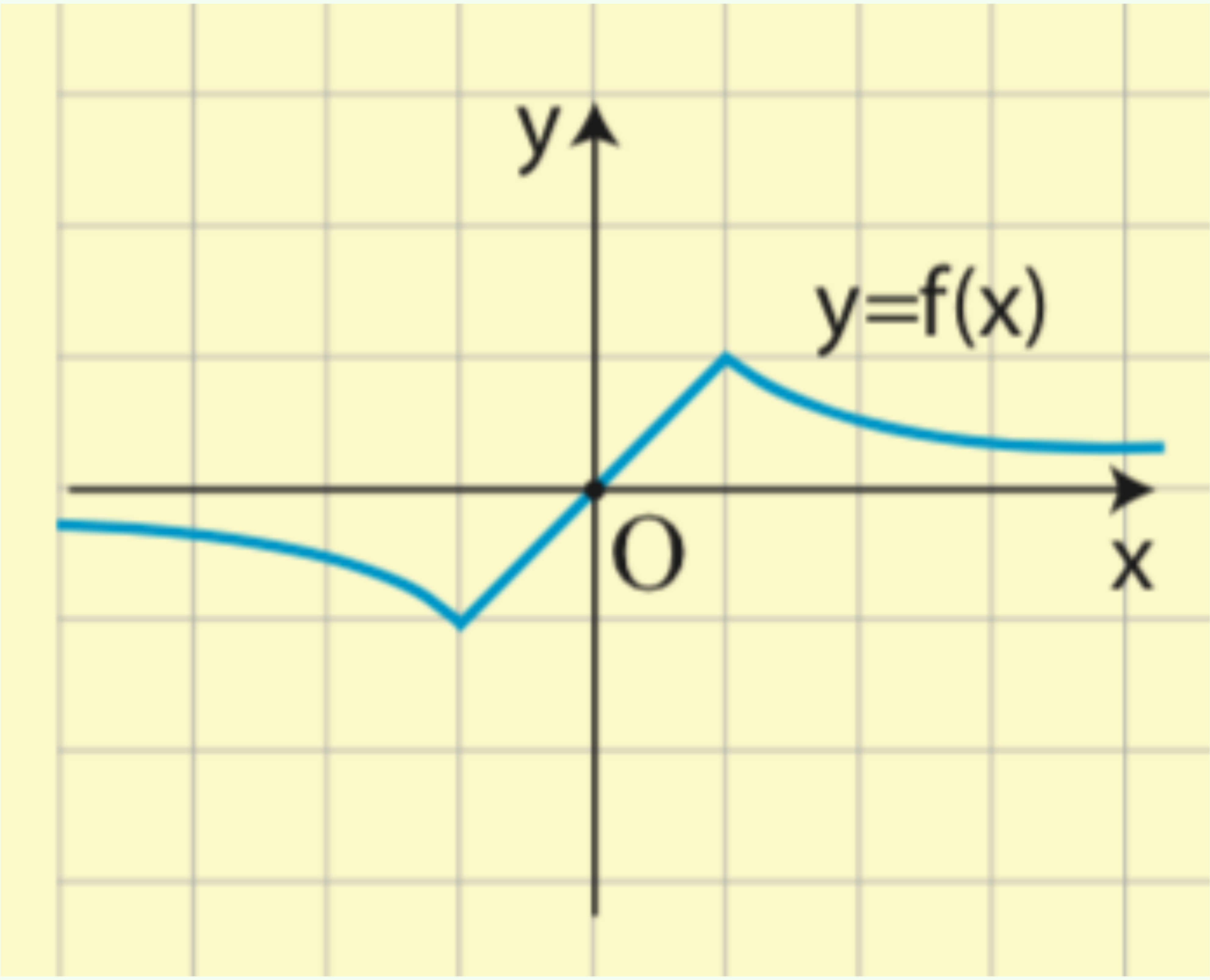
• Περιττή συνάρτηση

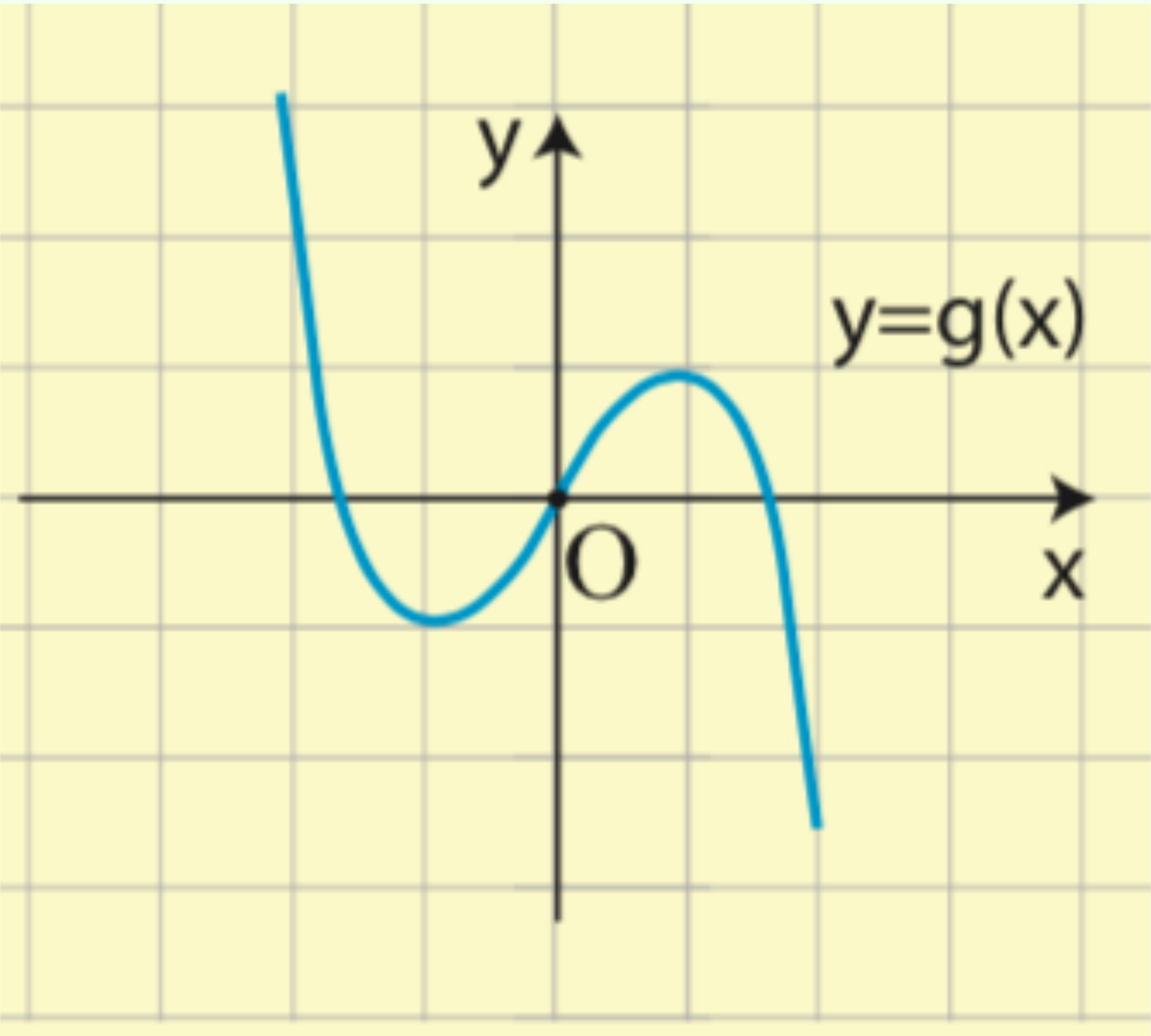


Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

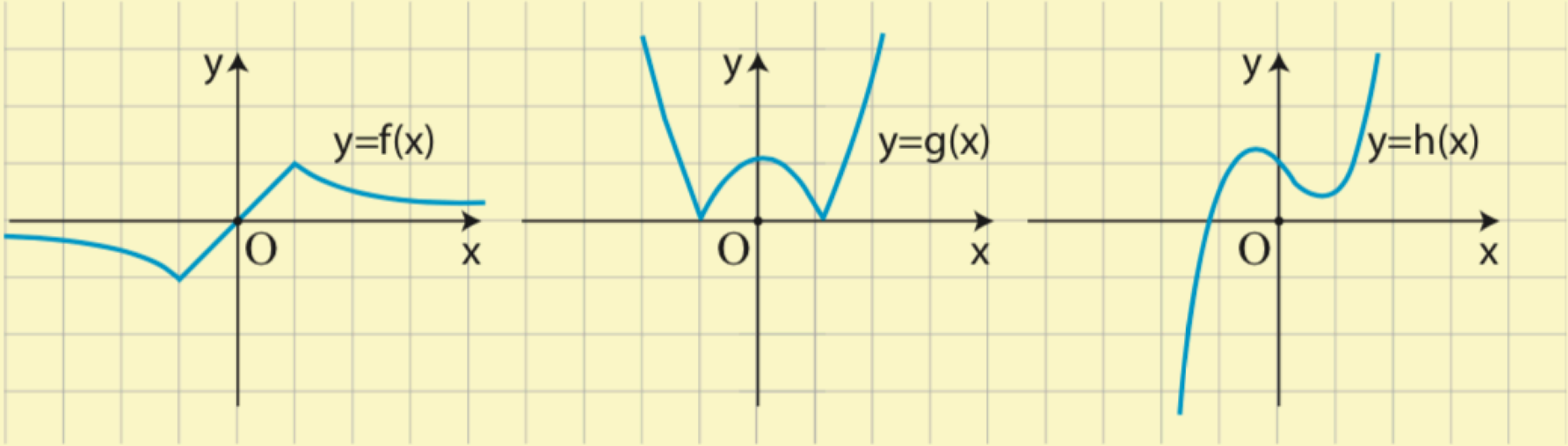
Παραδείγματα περιττών συναρτήσεων





Ασκήσεις για το σπίτι (1):

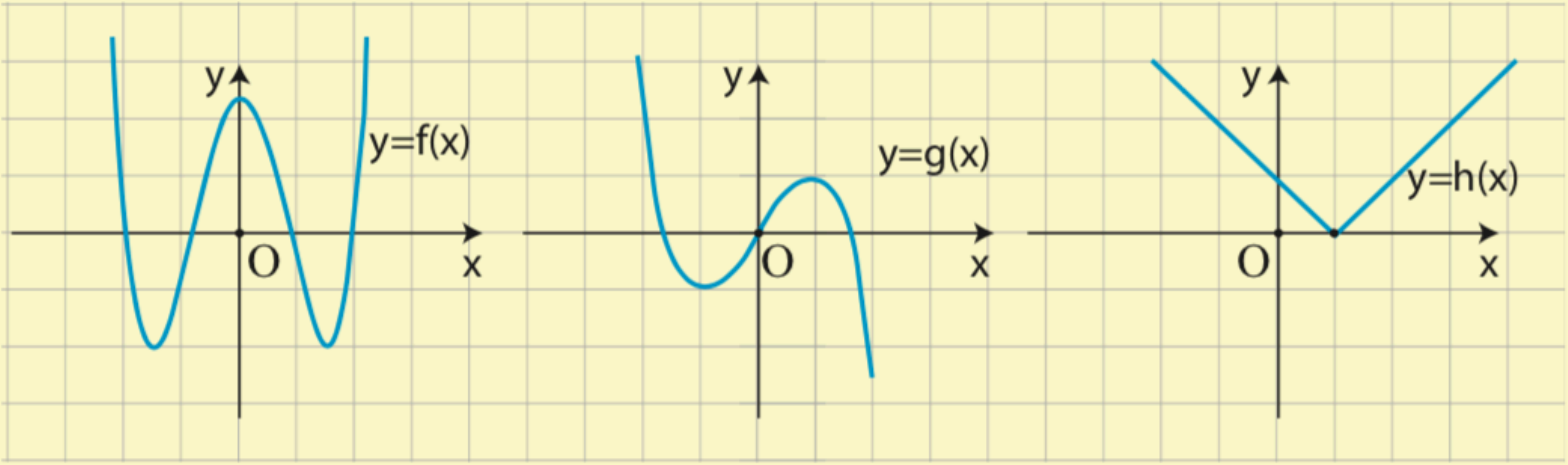
6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 39

Ασκήσεις για το σπίτι (2):

7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές

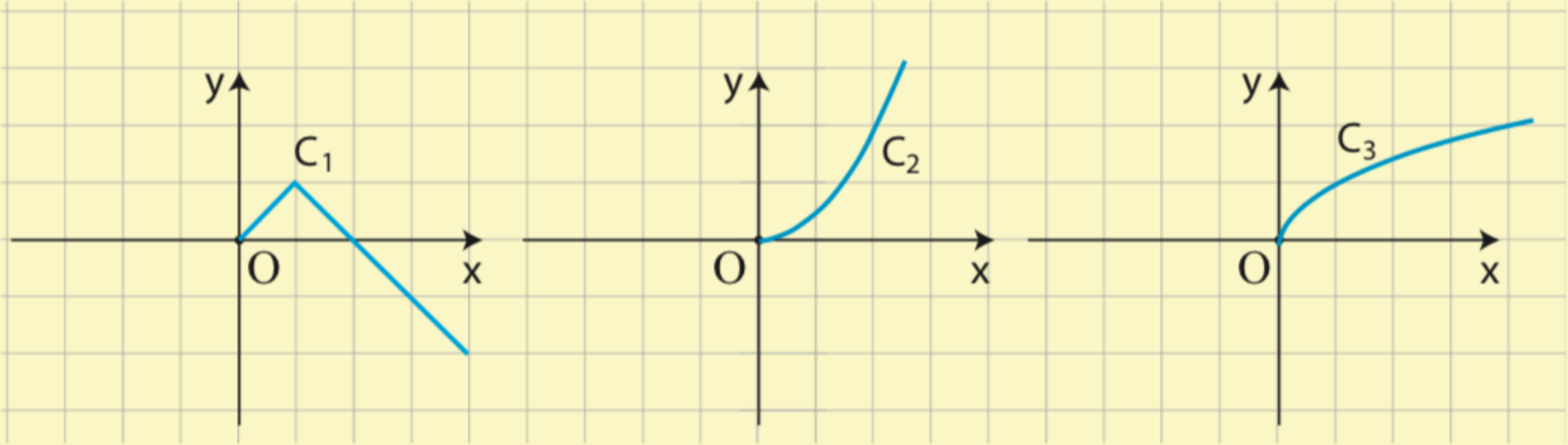


Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 39

Ασκήσεις για το σπίτι (3):

8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και β) Περιττής συνάρτησης.



Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 39

Μάθημα (6) - Συμμετρίες συνάρτησης (2)

Γενικότερα για τις άρτιες και περιττές συναρτήσεις:

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ο όρος “άρτια” προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος “περιττή” προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5$ κτλ., που έχουν περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

- **Πώς καταλαβαίνω εάν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή έχοντας μόνο τον τύπο της;**

Συμμετρίες συνάρτησης

- Πώς καταλαβαίνω εάν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή έχοντας μόνο τον τύπο της;

Χρησιμοποιώ τον ορισμό!!

Υπολογίζω την f(-x) :

- **Εάν f(-x)=f(x) τότε η f είναι άρτια.**
- **Εάν f(-x)=-f(x) τότε η f είναι περιττή.**

Παράδειγμα (1)

Βρείτε την συμμετρία της συνάρτησης f(x)= $2x^4 - x^2 + 1$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

Παράδειγμα (2)

Βρείτε την συμμετρία της συνάρτησης f(x)= $2x^3 - x$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$$

Άσκηση για το σπίτι (1):

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$

iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$

Άσκηση σχολικού βιβλίου σελίδα 38