Μάθημα (1) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών

Μεθοδολογία (1)

Έστω το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$

Προσδιορίζουμε τις παρακάτω ορίζουσες

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Συντελεστές του x

Συντελεστές του y

$$\boxed{D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta}$$

Σταθεροί όροι

Συντελεστές του y

$$\boxed{D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma}$$

Συντελεστές του x

Σταθεροί όροι

Μεθοδολογία (2)

Το γραμμικό σύστημα

- Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, τη (x,y) με $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Παράδειγμα (1)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D=\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array} \end{array}=1\cdot 4-3(-2)=4+6=10\neq 0$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Πώς θα την βρω;

- Υπολογίζω και τις ορίζουσες Dx , Dy.

Παράδειγμα (1)

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40$$

Σταθεροί όροι **y**

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

x **Σταθεροί όροι**

Παράδειγμα (1)

Τώρα μπορώ να υπολογίσω τα x και y.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{10} = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{10} = -1$$

Το σύστημα λοιπόν έχει μοναδική λύση την **(x,y)=(4,-1)**.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

Άσκηση για το σπίτι:

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

Μάθημα (2) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)

Παράδειγμα (2)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα D του συστήματος

$$\begin{array}{c} \mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1*3 - 3*1 = 3 - 3 = 0 \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array} \end{array}$$

Επομένως το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Πώς θα το καταλάβω όμως αυτό;

Παράδειγμα (2)

Παρατηρώ ότι εάν πολλαπλασιάσω την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το 3 προκύπτει η δεύτερη εξήσωση του συστήματος αλλά με διαφορετικό δεύτερο μέλος. Πιο συγκεκριμένα:

$$\boxed{*3}\ \begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+3y=12 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, είναι αδύνατο.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

Άσκηση για το σπίτι (1)

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$$

Μάθημα (3) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)

Παράδειγμα (3)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array} \end{array} = 1*(-6) - 3*(-2) = -6+6 = 0$$

Επομένως το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Πώς θα το καταλάβω όμως αυτό;

Παράδειγμα (3)

Παρατηρώ ότι εάν πολλαπλασιάσω την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το 3 προκύπτει η δεύτερη εξήσωση του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα:

$\boxed{*3}\ \begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-6y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$

Επομένως το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

Παράδειγμα (4)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y=\frac{1}{4} \\ x+3y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Σαν πρώτο βήμα, απαλοίφω τους παρονομαστές. Την πρώτη εξίσωση την πολλαπλασιάζω με το ΕΚΠ(2,4)=4 και την δεύτερη εξίσωση με το 2. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{array}{l} (*4) \\ (*2) \end{array} \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y=\frac{1}{4} \\ x+3y=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\frac{1}{2}x+4\frac{3}{2}y=4\frac{1}{4} \\ 2x+2*3y=2\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

Παράδειγμα (4)

$$\begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι οι δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος ταυτίζονται. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

Άσκηση για το σπίτι (2)

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 6x + 7y = 100 \end{cases}$$

Μάθημα (4) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)

Παράδειγμα (5)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} x-5=\dfrac{y-2}{7} \\ 4y-3=\dfrac{x+10}{3} \end{cases}$$

Αρχικά απαλοίφω τους παρονομαστές. Πολλαπλασιάζω την πρώτη εξίσωση με το 7 και την δεύτερη με το 3 και προκύπτει:

$$\begin{array}{l} (*7) \\ (*3) \end{array} \begin{cases} x-5=\dfrac{y-2}{7} \\ 4y-3=\dfrac{x+10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x-7*5=7\dfrac{y-2}{7} \\ 3*4y-3*3=3\dfrac{x+10}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

Παράδειγμα (5)

Συνεχίζω με πράξεις και έπειτα χωρίζω γνωστούς από αγνώστους ώστε να φέρω το σύστημα στη γραμμική του μορφή

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x - 35 = y - 2 \\ 12y - 9 = x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - y = 35 - 2 \\ -x + 12y = 10 + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7x - y = 33 \\ -x + 12y = 19 \end{cases}$$

Παράδειγμα (5)

Τώρα μπορώ να υπολογίσω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow \quad & \quad \downarrow \\ \mathbf{x} \quad & \quad \mathbf{y} \end{matrix}\end{array} = 7*12-(-1)(-1) = 84 - 1 = 83$$

Η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός επομένος το σύστημα έχει μοναδική λύση. Υπολογίζω λοιπόν τις ορίζουσες Dx και Dy.

$$D_x=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 33 & -1 \\ 19 & 12 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \textbf{Σταθεροί όροι} & \mathbf{y} \end{matrix}\end{array} = 33*12-(-1)19=396+19 = 415$$

$$D_y=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 7 & 33 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{x} & \textbf{Σταθεροί όροι} \end{matrix}\end{array} = 7*19-(-1)*33=133+33=166$$

Παράδειγμα (5)

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{415}{83}, \frac{166}{83}\right) = (5\ ,2)$$

Επομένως το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, την (x,y)=(5,2).

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

Ασκήσεις για το σπίτι (1)

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{7}+2=0 \\ \dfrac{x+6}{3}-\dfrac{y-6}{2}=8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}=4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$