

# **Μάθημα (1) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών**

# Μεθοδολογία (1)

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Προσδιορίζουμε τις παρακάτω ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

↓  
Συντελεστές  
του x

↓  
Συντελεστές  
του y

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

↓  
Σταθεροί  
όροι

↓  
Συντελεστές  
του y

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

↓  
Συντελεστές  
του x

↓  
Σταθεροί  
όροι

# Μεθοδολογία (2)

Το γραμμικό σύστημα

- Αν  $D \neq 0$ , έχει μοναδική λύση, τη  $(x,y)$  με  $x = \frac{D_x}{D}$  και  $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν  $D = 0$ , είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

# Παράδειγμα (1)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα  $D$  του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \neq 0$$

$\downarrow$              $\downarrow$   
 $x$              $y$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Πώς θα την βρω;

- Υπολογίζω και τις ορίζουσες  $D_x$ ,  $D_y$ .

# Παράδειγμα (1)

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40$$

↓                      ↓  
**Σταθεροί**   **y**  
**όροι**

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

↓                      ↓  
**x**                      **Σταθεροί**  
**όροι**

# Παράδειγμα (1)

Τώρα μπορώ να υπολογίσω τα  $x$  και  $y$ .

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{10} = 4$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{10} = -1$$

Το σύστημα λοιπόν έχει μοναδική λύση την  $(x,y)=(4,-1)$ .

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

# Άσκηση για το σπίτι:

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

# **Μάθημα (2) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)**



# Παράδειγμα (2)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1*3 - 3*1 = 3 - 3 = 0$$

↓      ↓  
x      y

Επομένως το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Πώς θα το καταλάβω όμως αυτό;

# Παράδειγμα (2)

Παρατηρώ ότι εάν πολλαπλασιάσω την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το 3 προκύπτει η δεύτερη εξίσωση του συστήματος αλλά με διαφορετικό δεύτερο μέλος. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{array}{c} \boxed{*3} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{array} \right. \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y = 12 \\ 3x + 3y = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

Επομένως το σύστημα αυτό δεν έχει λύση, είναι αδύνατο.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

# Άσκηση για το σπίτι (1)

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$$

# **Μάθημα (3) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)**

# Παράδειγμα (3)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$$

Σαν πρώτο βήμα, υπολογίζω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 * (-6) - 3 * (-2) = -6 + 6 = 0$$

↓       ↓  
x       y

Επομένως το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Πώς θα το καταλάβω όμως αυτό;

# Παράδειγμα (3)

Παρατηρώ ότι εάν πολλαπλασιάσω την πρώτη εξίσωση του συστήματος με το 3 προκύπτει η δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα:

$$\boxed{*3} \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$$

Επομένως το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

# Παράδειγμα (4)

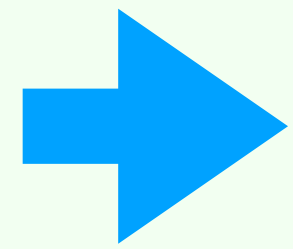
Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{4} \\ x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Σαν πρώτο βήμα, απαλοίφω τους παρονομαστές. Την πρώτη εξίσωση την πολλαπλασιάζω με το ΕΚΠ(2,4)=4 και την δεύτερη εξίσωση με το 2. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{array}{l} \text{(*4)} \\ \text{(*2)} \end{array} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{4} \\ x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 \frac{1}{2}x + 4 \frac{3}{2}y = 4 \frac{1}{4} \\ 2x + 2 * 3y = 2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Παράδειγμα (4)



$$\begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

Παρατηρώ ότι οι δύο γραμμικές εξισώσεις του συστήματος ταυτίζονται. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;



# Άσκηση για το σπίτι (2)

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 6x + 7y = 100 \end{cases}$$

# **Μάθημα (4) - Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο των Οριζουσών (Συνέχεια)**

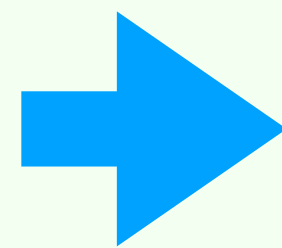
# Παράδειγμα (5)

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

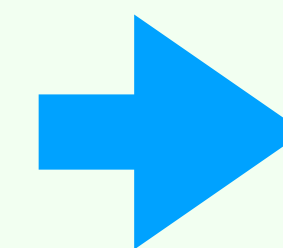
$$\begin{cases} x - 5 = \frac{y - 2}{7} \\ 4y - 3 = \frac{x + 10}{3} \end{cases}$$

Αρχικά απαλοίφω τους παρονομαστές. Πολλαπλασιάζω την πρώτη εξίσωση με το 7 και την δεύτερη με το 3 και προκύπτει:

$$\begin{matrix} (*7) \\ (*3) \end{matrix} \begin{cases} x - 5 = \frac{y - 2}{7} \\ 4y - 3 = \frac{x + 10}{3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 7x - 7 \cdot 5 = 7 \frac{y - 2}{7} \\ 3 \cdot 4y - 3 \cdot 3 = 3 \frac{x + 10}{3} \end{cases}$$



# Παράδειγμα (5)

Συνεχίζω με πράξεις και έπειτα χωρίζω γνωστούς από αγνώστους ώστε να φέρω το σύστημα στη γραμμική του μορφή

$$\begin{array}{c} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x - 35 = y - 2 \\ 12y - 9 = x + 10 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x - y = 35 - 2 \\ -x + 12y = 10 + 9 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x - y = 33 \\ -x + 12y = 19 \end{array} \right. \end{array}$$

# Παράδειγμα (5)

Τώρα μπορώ να υπολογίσω την ορίζουσα D του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = 7*12 - (-1)(-1) = 84 - 1 = 83$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
x      y

Η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση. Υπολογίζω λοιπόν τις ορίζουσες  $D_x$  και  $D_y$ .

$$D_x = \begin{vmatrix} 33 & -1 \\ 19 & 12 \end{vmatrix} = 33*12 - (-1)19 = 396 + 19 = 415$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
Σταθεροί    y  
όροι

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 33 \\ -1 & 19 \end{vmatrix} = 7*19 - (-1)*33 = 133 + 33 = 166$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
x      Σταθεροί  
          όροι

# Παράδειγμα (5)

$$(x, y) = \left( \frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right) = \left( \frac{415}{83}, \frac{166}{83} \right) = (5, 2)$$

Επομένως το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, την  $(x,y)=(5,2)$ .

Ερώτηση: Τι σχέση έχουν οι ευθείες, που αναπαριστούν οι γραμμικές εξισώσεις του συστήματος, στο επίπεδο;

# Ασκήσεις για το σπίτι (1)

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = 4 - \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2} - 3 = \frac{x-y}{3} \end{cases}$$